2°/En intégrant par partie,calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t dt$ puis en déduire la valeur de I_1

3°/ Montrer que, pour tout entier naturel non nul n on a :

$$I_{n+1} + (n+1)(n+3)I_n = (n+3)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}$$

4°/ En déduire la valeur de I_3.

C - Soit h une fonction continue sur $\boldsymbol{R}$ et ψ la fonction définie sur **R**

par : $\begin{cases} \psi(x) = \dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^x th(t)dt & \text{si } x \neq 0 \\ \psi(0) = h(0) \end{cases}$

1°/ On suppose qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout réel x et pour tout réel t variant entre 0 et x, on a : $|h(t)| \leq M$

a) Montrer que, pour tout réel x non nul, on a : $\left|\displaystyle\int_0^x th(t)dt\right| \leq M\frac{x^2}{2}$

b) En déduire que, si $h(0) = 0$, alors la fonction ψ est continue en 0

2°/a) Expliciter, pour tout réel x la fonction ψ dans le cas où $h(t) = \sin^2 t$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2 + 1 - 2x\sin 2x - \cos 2x}{4x}$

Problème 4 : (BAC)

A - 1°/ Soit la fonction φ définie sur **R** par $\varphi(x) = e^x(2-x) - 2$

a) Etudier les variations de φ.

b) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet dans **R** exactement deux solutions . On notera a la solution non nulle et vérifiera que $1 < a < 2$.

c) En déduire le signe de $\varphi(x)$.

2°/ Soit f la fonction définie sur **R** par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur **R**

b) Montrer que f est dérivable sur **R** et que :

Pour tout $x \in \mathbf{R}^*$ on a : $f'(x) = \dfrac{x\varphi(x)}{(e^x - 1)^2}$

c) Montrer que $f(a) = a(2-a)$